

# ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ИЗМЕРЕНИЮ РАЗНОСТИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ДВУХ НАЗЕМНЫХ ТОЧКАХ С ПОМОЩЬЮ ДУПЛЕКСНОГО СПУТНИКОВОГО МЕТОДА

© 2025 г. А. В. Наумов, Ф. Р. Смирнов\*, В. Ф. Фатеев

*Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений, Менделеево, Московская область, Россия*

\* e-mail: frsmirnof@vniiftri.ru

Поступила в редакцию 16.08.2024 г.

После доработки 23.09.2024 г.

Принята к публикации 14.10.2024 г.

Впервые в Российской Федерации проведен эксперимент по измерению разности гравитационных потенциалов и ортометрических высот двух наземных точек на основе квантовых часов и дуплексного спутникового метода связи. Измерительные точки размещались на территории ФГУП «ВНИИФТРИ» на расстоянии 850 м друг от друга с разностью высот около 21 м. В качестве ретранслятора использовался отечественный геостационарный спутник Экспресс-80, дуплексная связь устанавливалась с помощью стационарного и перебазированного комплектов дуплексной аппаратуры. Разность ортометрических высот измерена с погрешностью около 2.8 м.

*Ключевые слова:* квантовые часы, гравитационный потенциал, дуплексный метод, ортометрические высоты

DOI: 10.31857/S0004629925020062, EDN: GGZMLN

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Определение разности гравитационных потенциалов и соответствующей разности ортометрических высот между точками на поверхности Земли актуально при создании единой высотной основы страны. Известны отечественные эксперименты по измерению разности гравитационных потенциалов и ортометрических высот на основе метода релятивистской синхронизации [1, 2], измерений высокостабильных сигналов по ВОЛС и ГНСС [3, 4], а также с применением квантово-оптических систем или спутниковых лазерных дальномеров [5]. Известен также зарубежный эксперимент на основе дуплексной связи через геостационарные спутники [6]. Однако авторы данного эксперимента ограничились разнесением квантовых стандартов только по высоте в пределах одного здания. При разнесении стандартов частоты только по высоте не был рассмотрен вопрос определения разности гравитационных потенциалов и соответствующей разности ортометрических высот двух территориально-разнесенных точек. Решение данного вопроса является важной задачей на пути построения единой высотной основы с применением высокостабильных квантовых стандартов частоты.

Дуплексный спутниковый метод сравнения шкал времени (ШВ) широко используется для сравнения национальных эталонов ШВ [7]. Он за-

ключается в одновременной передаче сигналов точного времени между двумя пунктами через геостационарный спутник связи с помощью специализированных спутниковых модемов. Достоинствами этого метода является высокая оперативность и точность измерений (на уровне нескольких сотен пикосекунд), а также широкая зона охвата — в пределах зоны покрытия геостационарного спутника связи. Это открывает возможность использования метода для определения разности гравитационных потенциалов глобально разнесенных точек на поверхности Земли.

Физической основой проведенных экспериментов являются эффекты гравитационного замедления времени и гравитационного смещения частоты в высокостабильных квантовых часах, выступающих в роли хранителей ШВ эталонных частот.

В общем случае относительная величина гравитационного смещения ШВ  $\Delta\tau_{гр}$  и гравитационного смещения частоты  $\Delta f_{гр}$  пространственно разнесенных квантовых часов, определяется соотношением [1, 2]:

$$\frac{\Delta\tau_{гр}}{\tau_{rm}} = \frac{\Delta f_{гр}}{f_0} = \frac{\Delta\varphi_{12}}{c^2} \approx \frac{g\Delta H_{орт}}{c^2}, \quad (1)$$

где  $\tau_{rm}$  — интервал времени наблюдения расхождения ШВ;  $\Delta\varphi_{12} \approx g\Delta H_{орт}$  — разность гравитаци-

онных потенциалов между точками размещения квантовых часов 1 и 2;  $\Delta H_{\text{орт}}$  — разность ортометрических высот их размещения;  $g$  — среднее значение ускорения свободного падения в районе измерений;  $c$  — скорость света.

В статье предложен эксперимент по измерению разности гравитационных потенциалов на основе дуплексного спутникового метода на основе пары разнесенных высокостабильных наземных водородных квантовых часов. При этом расстояние между часами увеличено до 850 м, а разность высот — до 21 м. Влиянием центробежного потенциала при таком близком размещении квантовых часов можно пренебречь в силу его малости.

## 2. ИСПОЛЬЗУЕМОЕ ОБОРУДОВАНИЕ

Схема эксперимента представлена на рис. 1.

В качестве стационарных квантовых часов (КЧ-С) в эксперименте использован опорный хранитель единиц времени и частоты из состава Государственного первичного эталона единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ 1-2022 [8] с базовой шкалой времени  $\tau_C$  и с относительной нестабильностью частоты задающего генератора  $f_0$  не более  $0.5 \cdot 10^{-15}$  на суточном интервале.

В роли перевозимых квантовых часов (КЧ-М) в эксперименте использованы перевозимые квантовые часы водородные нового поколения ПКЧ-Н производства АО «Время-Ч» со шкалой времени  $\tau_M$  и частотой задающего генератора  $f_M$ , имеющей относительную нестабильность не хуже  $(\sigma f/f_0) = 1 \cdot 10^{-15}$  за 3600 с. Измерение разности ШВ кван-

товых часов в ходе эксперимента осуществляется с помощью системы внутренних сличений ГЭТ 1-2022, в составе которой используется измеритель интервалов времени SR-620 с разрешающей способностью единичного измерения 25 пс.

В эксперименте используется спутниковый канал сравнений ШВ через геостационарный спутник «Экспресс-80», состоящий из стационарного и автомобильного комплектов дуплексной аппаратуры «Дуплекс». Стационарный комплект размещен в помещении объекта «Сигнал» (см. рис. 1) вблизи ГЭТ 1-2022 и функционирует непрерывно.

Автомобильный комплект дуплексной аппаратуры реализован на базе автомобильной лаборатории на амортизированном основании. Каждый комплект аппаратуры представляет собой типовую наземную станцию спутниковой связи Кудиапазона. Для обеспечения связи использован специализированный модем SATRE производства фирмы TimeTech, обеспечивающий сравнение ШВ дуплексным спутниковым методом с погрешностью, не превышающей 0.3 нс на суточном интервале. Передача опорных сигналов в мобильную лабораторию осуществляется по ВОЛС с применением оптических модулей фирмы TimeTech, размещаемых на концах оптической линии связи.

Перевозимые квантовые часы КЧ-М при выполнении эксперимента устанавливаются либо рядом с КЧ-С (во время калибровки), либо внутри автомобильной лаборатории (при транспортировании в точку измерений), либо на 7-м этаже корпуса 28 (см. рис. 1) при выполнении измерений. Непрерывный контроль текущей температу-

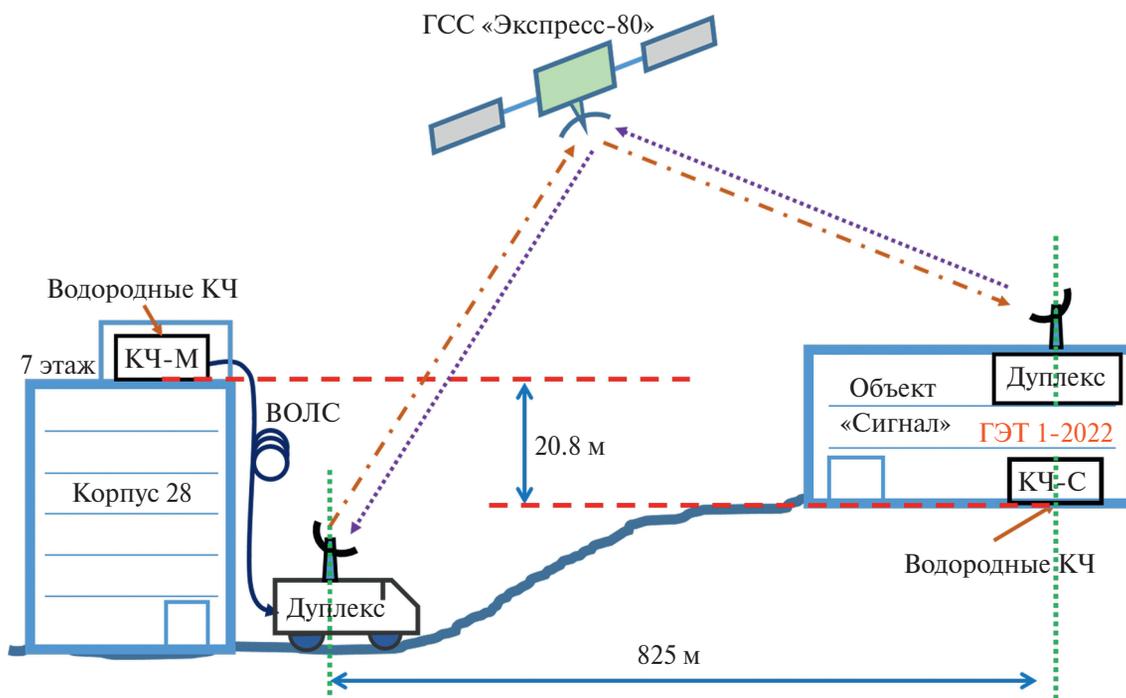


Рис. 1. Схема эксперимента по измерению разности гравитационных потенциалов дуплексным методом.

ры в зоне размещения КЧ-М в эксперименте выполнялся с помощью бортового термогигрометра ИВА-6А-КП-Д с чувствительностью  $0.1^\circ\text{C}$  и погрешностью измерений не более  $\pm 0.3^\circ\text{C}$ . Влияние изменений магнитного поля Земли на принятом уровне не учитывалось.

### 3. ПЛАН ЭКСПЕРИМЕНТА. ИСХОДНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Эксперимент проводился в несколько этапов.

**Этап 1. Начальная взаимная калибровка КЧ-С и КЧ-М.** На данном этапе решались задачи синхронизации шкал времени (ШВ) перевозимых часов КЧ-М  $\tau_M$  и стационарных часов КЧ-С  $\tau_C$ , определения начальной разности частот задающего генератора КЧ-М и стационарных квантовых часов КЧ-С  $\Delta f_{0_{\text{нач}}}/f_{0_C}$ , а также определения температурного коэффициента частоты.

В общем случае релятивистское расхождение ШВ  $\tau_M$  и  $\tau_C$ , которое обозначим в виде  $\Delta\tau_{MC} = \tau_M - \tau_C$ , определялось по известной формуле [1]:

$$\Delta\tau_{MC} = (\tau_M - \tau_C)_K + (\Delta\tau_{0_M} + C\Delta\tau_C^2) + \Delta\tau_T + \Delta\tau_{\text{гр}}, \quad (2)$$

где  $(\tau_M - \tau_C)_K = \tau_{M_0} - \tau_{C_0}$  — начальное (калибровочное) расхождение исследуемых шкал времени на момент базового времени  $\tau_{C_0}$  (индекс “0” означает начальное значение);  $\Delta\tau_{0_M} = \Delta\tau_C (f_{0_M} - f_{0_C})_{\text{нач}}/f_{0_C}$  — линейный уход шкалы КЧ-М на интервале базового времени  $\Delta\tau_C = (\tau_C - \tau_{C_0})$  за счет начальной расстройки частоты бортового генератора КЧ-М  $f_{0_M}$  относительно частоты эталона  $f_{0_C}$ ;  $\Delta\tau_C^2 = C\Delta\tau_C^2$  — квадратичный уход шкалы времени КЧ-М, вызванный линейным дрейфом начального частотного рассогласования КЧ-М, определяемого коэффициентом  $C = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau_C} \left( \frac{\Delta f}{f_{0_C}} \right)$ , где

$\Delta f = f_{0_M} - f_{0_C}$ ;  $\Delta\tau_T = K_T \int_0^{\Delta\tau_C} \Delta T(\tau_C) d\tau_C$  — температурный уход ШВ КЧ-М на интервале базового времени  $\Delta\tau_C = (\tau_C - \tau_{C_0})$  за счет разности текущей температуры КЧ-М относительно температуры КЧ-С  $\Delta T(\tau_C)$  в ходе эксперимента;  $K_T$  — температурный коэффициент относительного изменения частоты задающего генератора КЧ-М относительно частоты эталона,  $1/^\circ\text{C}$ ;  $\Delta\tau_{\text{гр}}$  — гравитационный уход мобильных часов относительно эталонных, который определяется формулой (1) на известном интервале наблюдения  $\tau_H$ .

Измерение начального (калибровочного) расхождения ШВ, начальной частотной расстройки КЧ-М и КЧ-С проводится при условии отсутствия взаимного температурного и гравитационного смещения шкал времени КЧ-М и КЧ-С  $\Delta\tau_T = \Delta\tau_{\text{гр}} = 0$ . Это достигается установкой перевозимых квантовых часов КЧ-М в непосредственной близости

к КЧ-С на одной высоте с ними (в одном помещении на первом этаже объекта “Сигнал”), когда  $\Delta T = \Delta H_{\text{орт}} = 0$ .

В начальный момент времени измерений, когда можно считать  $\Delta\tau_C \approx 0$  из формулы (1) находим начальное (калибровочное) расхождение ШВ:

$$(\tau_M - \tau_C)_{\text{изм}} = (\tau_M - \tau_C)_K. \quad (3)$$

Далее при известном интервале базового времени  $\Delta\tau_C = (\tau_C - \tau_{C_0})$  находится искомое относительное начальное расхождение их задающих частот:

$$\frac{(f_{0_M} - f_{0_C})_{\text{нач}}}{f_{0_C}} = \frac{(\Delta\tau_{0_M})_{\text{изм}}}{\Delta\tau_C}. \quad (4)$$

где  $(\Delta\tau_{0_M})_{\text{изм}}$  — измеренное расхождение шкалы КЧ-М относительно КЧ-С за счет расхождения частот. По результатам измерения относительной расстройки (4) далее на некотором интервале времени определяется ее коэффициент  $C$  дрейфа.

В дальнейшем по множеству точек расхождений ШВ КЧ-М и КЧ-С, определенных системой внутренних сличений ГЭТ 1-2022 на некотором интервале времени, методом наименьших квадратов путем квадратичной аппроксимации полученного ряда данных определяется коэффициент  $C$  дрейфа частоты КЧ-М. Разность шкал времени КЧ-М и КЧ-С при этом определяется уравнением:

$$\Delta\tau_{MC}(t) = (\tau_M - \tau_C)_K + \frac{(f_{0_M} - f_{0_C})_{\text{нач}}}{f_{0_C}} t + Ct^2,$$

а разностная частота изменяется по закону:

$$\frac{(f_{0_M} - f_{0_C})}{f_{0_C}} = \frac{(f_{0_M} - f_{0_C})_{\text{нач}}}{f_{0_C}} + 2Ct,$$

где второе слагаемое  $2Ct$  характеризует искомый линейный дрейф разностной частоты. Данный метод является стандартным методом частотного анализа по фазовым измерениям, оптимальным для модели белого фазового шума [9].

Температурный коэффициент относительного изменения частоты задающего генератора КЧ-М  $K_T$  измеряется при уже измеренном начальном (калибровочном) расхождении ШВ и при измеренном расхождении частот. При этом КЧ-М устанавливается внутри автомобильной лаборатории рядом с бортовым комплектом дуплексной аппаратуры. Внутри автомобиля устанавливалась температура, отличная от температуры в помещении, где установлены КЧ-С. Во время измерений автомобильная лаборатория устанавливалась на одной высоте с КЧ-С (т. е. при  $\Delta H_{\text{орт}} \approx 0$  для устранения влияния гравитационного эффекта) снаружи корпуса объекта “Сигнал” в непосредственной близости от места размещения КЧ-С (в пределах 5 м по горизонтали). Сигналы от КЧ-М подавались на систему внутренних сличений ГЭТ1-2022 с помощью коак-

сиальных кабелей, проложенных от объекта “Сигнал” до автомобиля.

В результате этих рассуждений выделим два значения релятивистского расхождения шкал времени  $\tau_C$  и  $\tau_M$ : первое значение — при  $\Delta\tau_C = (\tau_C - \tau_{C_0}) = 0$ :

$$\Delta\tau_{MC}^0 = (\tau_M - \tau_C)_0, \quad (5)$$

а также второе значение, получаемое после интервала накопления  $\Delta\tau_C = \tau_H$  (который может достигать нескольких суток):

$$\Delta\tau_{MC}^H = (\tau_M - \tau_C)_0 + \left( (\Delta\tau_{0M}^H + C\tau_H^2) + \Delta\tau_T^H + \Delta\tau_{TP}^H \right), \quad (6)$$

где составляющие  $\Delta\tau_{0M}^H$ ,  $C\tau_H^2$ ,  $\Delta\tau_T^H$ ,  $\Delta\tau_{TP}^H$  на интервале  $\Delta\tau_C = \tau_H$  определяются в соответствии с (1) и (2):

$$\Delta\tau_{0M}^H = \tau_H \frac{(f_{0M} - f_{0C})_{нач}}{f_{0C}}, \quad C = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau_C} \left( \frac{\Delta f}{f_{0C}} \right); \quad (7)$$

$$\Delta\tau_T^H = K_T \int_0^{\tau_H} \Delta T(\tau_C) d\tau_C, \quad \Delta\tau_{TP}^H \approx \tau_H \frac{g\Delta H_{опт}}{c^2}.$$

**Этап 2. Перемещение КЧ-М в точку измерений.**

После выполнения начальной калибровки КЧ-М перебазируются в помещение корпуса 28 ФГУП “ВНИИФТРИ”, который расположен на расстоянии 825 м от объекта “Сигнал”. Новая точка базирования КЧ-М размещена на седьмом этаже корпуса 28. Измеренная геодезическим методом разность высот новой точки расположения КЧ-М и точки расположения КЧ-С на объекте “Сигнал” составляет  $\Delta H_{геод} = 20.8$  м. Дуплексный метод реализуется с помощью автомобильного комплекта аппаратуры “Дуплекс”, располагаемого в непосредственной близости к корпусу 28, в точке устойчивого наблюдения ГСС “Экспресс-80”. Передача сигналов от КЧ-М в мобильный комплект осуществлялась по ВОЛС с применением оптических модулей фирмы TimeTech, размещаемых на концах оптической линии связи.

**Этап 3. Измерение начального расхождения шкал времени КЧ-М и КЧ-С.** На этом этапе выполняется первое, или начальное, сравнение ШВ квантовых часов  $\tau_M$  и  $\tau_C$  дуплексным спутниковым методом. При этом интервал базового времени  $\Delta\tau_C = (\tau_C - \tau_{C_0}) = 0$ . Для обеспечения связи через геостационарный спутник (ГСС), как упоминалось, использован специализированный модем SATRE производства фирмы TimeTech. Данные измерений автомобильного комплекта аппаратуры “Дуплекс” передавались на объект “Сигнал” с использованием средств локальной вычислительной сети для последующей обработки.

Дуплексная связь через ГСС в рассматриваемом случае имеет две особенности. Первая особенность заключается в том, что угол между радиолиниями ретрансляции очень мал. Это объясняется тем, что две приемо-передающие антенны разме-

щены достаточно близко друг к другу и по высоте и по горизонтали. Второй особенностью является весьма малая скорость перемещения ГСС относительно Земли и практическое равенство радиальных скоростей спутника относительно близко расположенных наземных точек приема-передачи сигнала ( $\dot{R}_C = \dot{R}_M = \dot{R}$ ).

Релятивистский расчет времени распространения радиосигнала в дуплексной системе между точками размещения наземных часов КЧ-С и КЧ-М (обозначим их условно индексами “С” и “М”) выполнялся с учетом гравитационных эффектов задержки порядка  $1/c^2$  и  $1/c^3$  ( $c$  — скорость света) [1]. При этом измеряемые промежутки времени между одноименными метками шкал времени, посылаемыми от наземной станции “С” к станции “М” ( $C \rightarrow M$ ) и обратно ( $C \leftarrow M$ ) через ГСС определяются следующими релятивистскими формулами [1]:

$$\tau_{C \rightarrow M}^{изм0} \Delta\tau_{MC}^0 + \frac{R}{c} \left[ 1 - \frac{\mu_e}{\rho_M c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \varphi_M)^2 \right] + \tau_{TP} + \frac{\dot{R}}{c} \left( \frac{R}{c} + \tau_3 \right) + \tau_{\Omega}^0 + \delta\tau_{\Omega}^0, \quad (8)$$

$$\tau_{C \leftarrow M}^{изм0} - \Delta\tau_{MC}^0 + \frac{R}{c} \left[ 1 - \frac{\mu_e}{\rho_C c^2} - \frac{1}{2c^2} (\Omega_e R_e \cos \varphi_C)^2 \right] + \tau_{TP} + \frac{\dot{R}}{c} \left( \frac{R}{c} + \tau_3 \right) + \tau_{\Omega}^0 + \delta\tau_{\Omega}^0, \quad (9)$$

где  $\Delta\tau_{MC}^0$  — релятивистское расхождение шкал времени  $\tau_M$  и  $\tau_C$ , определяемое формулой (5);  $R$ ,  $\dot{R}$  — текущая дальность и радиальная скорость спутника относительно наземной точки измерений;  $\tau_3$  — задержка радиосигнала в бортовом ретрансляторе;  $\Omega_e$ ,  $R_e$  — угловая скорость и экваториальный радиус Земли;  $\mu_e = 3.986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$  — геоцентрическая гравитационная постоянная;  $c$  — скорость света;  $\rho_M$ ,  $\rho_C$ ,  $\varphi_M$ ,  $\varphi_C$  — радиус-векторы и геоцентрические широты наземных точек размещения измерительных квантовых часов КЧ-М и КЧ-С в эксперименте;  $\tau_{TP} = \tau_{TP}^{\rightarrow} + \tau_{TP}^{\leftarrow}$  — гравитационная задержка радиолуча на трассе распространения, которая складывается из задержек при распространении радиолуча “на спутник”  $\tau_{TP}^{\rightarrow}$  и “от спутника”  $\tau_{TP}^{\leftarrow}$ ;  $\tau_{\Omega}^{\rightarrow}$ ,  $\tau_{\Omega}^{\leftarrow}$  — задержка лучей на трассе “на спутник” и “от спутника” вследствие эффекта Саньяка, вызванного вращением Земли;  $\delta\tau_{\Omega}^{\rightarrow}$ ,  $\delta\tau_{\Omega}^{\leftarrow}$  — задержка лучей на трассе “на спутник” и “от спутника” в атмосфере.

Для примера, одна из составляющих гравитационной задержки на участке трассы “КЧ-М-спутник” определяется известной формулой [1]:

$$\tau_{TP}^{\rightarrow} = \frac{2\mu_e}{c^3} \ln \frac{R_C + R_{KA} + R}{R_C + R_{KA} - R}, \quad (10)$$

где  $R_C$ ,  $R_{KA}$  — радиус-векторы точек размещения КЧ-М и спутника;  $R = (\vec{R}_{KA} - \vec{R}_C)\vec{e}$  — длина трас-

сы “КЧ-С-спутник”;  $\vec{e}$  — орт радиолуча. Особенно-стями этой задержки является очень малая величина (порядка  $1/c^3$ ), а также независимость от направления радиолуча. Поэтому для встречных лучей на принятом уровне точности лучей ее считаем одинаковой, т. е.  $\tau_{\Omega}^{\rightarrow} = \tau_{\Omega}^{\leftarrow}$ .

Эффект Саньяка для того же участка трассы распространения радиолуча “КЧ-С — спутник” определяется формулой [1]:

$$\tau_{\Omega}^{0\rightarrow} = \frac{2\Omega_e S_{\Delta}}{c^2} = \frac{\Omega_e}{c^2} (x_C y_{КА} - x_{КА} y_C), \quad (11)$$

где  $S_{\Delta} = 2(x_C y_{КА} - x_{КА} y_C)$  — площадь проекции треугольника “КЧ-С-спутник — центр Земли” на плоскость экватора на момент измерений (индекс “КА” обозначает геостационарный космический аппарат). Она определяется координатами КЧ-С и спутника в плоскости XOY геоцентрической системы ITRF, вращающейся вместе с Землей. Особенности гироскопической задержки в том, что она меняет знак в зависимости от направления радиолуча, а также сохраняет значение при неизменных координатах КЧ-С, КЧ-М и геостационарного спутника в системе ITRF.

Атмосферные задержки радиолучей  $\delta\tau_{\rightarrow}^{a0}$ ,  $\delta\tau_{\leftarrow}^{a0}$  определяются параметрами атмосферы в районе размещения КЧ-С и КЧ-М. Поскольку расстояние между наземными часами невелико, то эти задержки для прямого и обратного лучей весьма близки по величине, что способствует их компенсации.

На основе формул (8) и (9) получаем выражение, определяющее разность интервалов времени распространения радиосигналов на трассе “КЧ-С — спутник — КЧ-М” для начального момента эксперимента, соответствующего начальному интервалу базового времени  $\Delta\tau_C = (\tau_C - \tau_{C_0}) = 0$  (соответствующие величины отмечаем индексом “0”):

$$\Delta\tau_{CM}^{изм0} = \tau_{C\rightarrow M}^{изм0} - \tau_{C\leftarrow M}^{изм0} = 2\Delta\tau_{CM}^0 + \frac{R\mu_e}{c^3} \left( \frac{1}{\rho_{M_0}} - \frac{1}{\rho_{C_0}} \right) + \frac{R_0}{c^3} \Omega_e^2 R_e^2 (\cos^2 \varphi_{M_0} - \cos^2 \varphi_{C_0}) + \tau_{\Omega}^{0\rightarrow} + (\delta\tau_{\pm}^a)^0, \quad (12)$$

где расхождение часов  $\Delta\tau_{CM}^0$  определяется формулой 5;  $(\delta\tau_{\pm}^a)^0 = (\delta\tau_{\rightarrow}^a - \delta\tau_{\leftarrow}^a)^0$  — разность атмосферных задержек в прямом и обратном каналах дуплексной системы;  $\tau_{\Omega}^{0\rightarrow}$  — суммарный эффект Саньяка, который, согласно (11), зависит от направления распространения радиолуча и определяется формулой:

$$\tau_{\Omega}^{0\rightarrow} = \tau_{\Omega}^{\rightarrow} + \tau_{\Omega}^{\leftarrow} = \frac{4\Omega_e S_{\pm}}{c^2} = \frac{2\Omega_e}{c^2} \times [(x_C y_{КА} - x_{КА} y_C)^0 + (x_{КА} y_M - x_M y_{КА})^0], \quad (13)$$

(здесь  $\Omega_e S_{\pm}$  — скалярное произведение вектора угловой скорости Земли и вектора площади, охва-

тывающего контур: “КЧ-С — спутник — КЧ-М — центр Земли”).

**Этап 4. Измерение расхождения шкал времени разнесенных часов после интервала накопления  $\tau_H$ .** На этом этапе выполняется второе сравнение ШВ квантовых часов  $\tau_M$  и  $\tau_C$  дуплексным спутниковым методом. При этом второе сравнение ШВ выполняется после первого через интервал базового времени  $\Delta\tau_C = \tau_H$ . Предполагается, что на этом интервале, при прочих постоянных характеристиках, происходит накопление искомого гравитационного эффекта.

Как и при первом сравнении, измеряемые промежутки времени между одноименными метками шкал времени, посылаемыми через геостационарный спутник от наземной станции “С” к станции “М” ( $C \rightarrow M$ )  $\tau_{C\rightarrow M}^{измH}$  и обратно ( $C \leftarrow M$ )  $\tau_{C\leftarrow M}^{измH}$  определяются релятивистскими формулами вида (8) и (9). Неизменные величины в этих формулах помечены индексом “0”.

Разность между запаздываниями прямого луча ( $C \rightarrow M$ ) и обратного луча ( $C \leftarrow M$ ), распространяющихся через спутник при втором сравнении ШВ, определяется в этом случае соотношением, подобным (12):

$$\Delta\tau_{CM}^{измH} = \tau_{C\rightarrow M}^{измH} - \tau_{C\leftarrow M}^{измH} = 2\Delta\tau_{CM}^H + \frac{R\mu_e}{c^3} \left( \frac{1}{\rho_{M_0}} - \frac{1}{\rho_{C_0}} \right) + \frac{R_0}{c^3} \Omega_e^2 R_e^2 (\cos^2 \varphi_{M_0} - \cos^2 \varphi_{C_0}) + \tau_{\Omega}^{0\rightarrow} + (\delta\tau_{\pm}^a)^H, \quad (14)$$

где релятивистское расхождение шкал времени часов  $\Delta\tau_{MC}^H$  на момент  $\tau_H$  определяется формулой (6).

**Этап 5. Вычисление гравитационного эффекта смещения шкал времени.** По этому смещению определяется искомая разность гравитационных потенциалов и разность ортометрических высот точек размещения часов.

Изменение взаимного запаздывания встречных лучей в дуплексной системе на интервале накопления  $\tau_H$  определим как разность между запаздываниями (14) и (12). Используя формулы (5), (6) и (7), а также постоянство второго, третьего и четвертого членов, входящих в формулы (14) и (12), получаем:

$$\frac{1}{2} (\Delta\tau_{CM}^{измH} - \Delta\tau_{CM}^{изм0}) - (\Delta\tau_{M_0}^H + C\tau_H^2 + \Delta\tau_T^H) - \delta\tau_{H-0}^a = \frac{g\tau_H}{c^2} \Delta H_{орт}, \quad (15)$$

где  $\delta\tau_{H-0}^a = (\delta\tau_{\pm}^a)^H - (\delta\tau_{\pm}^a)^0$  — остаточная некомпенсированная разность задержек в атмосфере, соответствующих второму и первому сравнениям ШВ через спутник; последний член определяет накопленное на интервале  $\tau_H$  гравитационное смещение ШВ разнесенных квантовых часов.

Из полученного выражения находится искомая разность ортометрических высот  $\Delta H_{орт}$  и разность гравитационных потенциалов между точками уста-

новки квантовых часов КЧ-С и КЧ-М:

$$\Delta H_{\text{орт}}^{CM} = \frac{c^2}{g\tau_H} \left[ \frac{1}{2} (\Delta\tau_{\text{СМ}}^{\text{измН}} - \Delta\tau_{\text{СМ}}^{\text{изм0}}) - \delta\tau_{\text{выч}} - \delta\tau_{\text{Н-0}}^a \right],$$

$$\Delta\varphi_{\text{СМ}} = g\Delta H_{\text{орт}}^{CM}, \quad (16)$$

где  $\delta\tau_{\text{выч}} = (\Delta\tau_{0\text{М}}^{\text{Н}} + C\tau_{\text{Н}}^2 + \Delta\tau_{\text{T}}^{\text{Н}})_{\text{выч}}$  — сумма задержек, вычисляемых по результатам калибровок.

Среднеквадратическая погрешность определения ортометрического превышения при условии нормального закона распределения результатов измерений составит:

$$\sigma_{\text{Н}} \approx \frac{c^2}{g\tau_H} \left[ \frac{1}{4} (\sigma_{\text{измН}}^2 + \sigma_{\text{изм0}}^2) + \sigma_{\Delta\tau_0}^2 + \sigma_{\Delta\tau}^2 \right]^{+0.5}, \quad (17)$$

где  $\sigma_{\Delta\tau_0}$ ,  $\sigma_{\Delta\tau}$  — среднеквадратические погрешности вычисления, соответственно, ухода шкалы КЧ-М на интервале времени  $\tau_H$  за счет начальной расстройки частоты бортового генератора КЧ-М и ее дрейфа (см. ф. (2)), а также погрешность расчета температурного ухода ШВ на том же интервале времени (см. ф. (2));  $\sigma_{\text{измН}}$ ,  $\sigma_{\text{изм0}}$  — среднеквадратические погрешности измерений расхождений шкал времени разнесенных часов при начальном их сравнении (этап 3) и при сравнении после интервала накопления  $\tau_H$  (этап 4).

Нестационарность атмосферы для разнесенных пунктов ограничивает точность рассмотренного метода синхронизации, поэтому вносимые ей погрешности были включены в эту формулу. Как уже отмечалось выше, опыт использования специализированного модема SATRE производства фирмы TimeTech обеспечивает сравнение ШВ дуплексным спутниковым методом с учетом влияния атмосферы с погрешностью, не превышающей 0.3 нс на суточном интервале.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

**На первом этапе** (в период с 14 по 22 ноября 2023 г.) производилась начальная калибровка измерительных средств. Сравнение шкал времени квантовых часов КЧ-М и КЧ-С осуществлялось с помощью системы внутренних сличений ГЭТ 1-2022 с частотой записи результатов один раз в три минуты.

1. По результатам калибровки установлена начальная (калибровочная) рассинхронизация шкал времени  $\tau_{\text{М}}$  и  $\tau_{\text{С}}$ :

$$(\tau_{\text{М}} - \tau_{\text{С}})_{\text{К}} = \tau_{\text{М}_0} - \tau_{\text{С}_0} = -101\,446\,281.611 \pm 0.025 \text{ нс.}$$

Во время калибровки определены значения других величин, входящих в формулу (2).

2. Начальная отстройка частоты КЧ-М относительно КЧ-С определялась по результатам измерений системы внутренних сличений ГЭТ 1-2022 на интервале времени наблюдений 195 ч в период с 14 по 22 ноября 2023 при общем количестве результатов измерений 3897. Искомое относительное

начальное расхождение частот КЧ-М и КЧ-С в эксперименте составило:

$$\frac{(f_{0\text{М}} - f_{0\text{С}})_{\text{нач}}}{f_{0\text{С}}} = \frac{(\Delta\tau_{0\text{М}})_{\text{изм}}}{\Delta\tau_{\text{С}}} = -(2.1701 \pm 0.0006) \cdot 10^{-13}.$$

3. Коэффициент линейного дрейфа  $C$  КЧ-М определялся на интервале времени наблюдения начальной калибровки 195 ч и составил  $C = (4.773 \pm \pm 0.043) \cdot 10^{-22}$ .

4. Температурный коэффициент частоты  $K_T$  определялся путем сравнения расхождений частот задающих генераторов часов КЧ-М и КЧ-С при разной температуре внутреннего объема автомобильной термостабилизированной лаборатории, которая размещалась вблизи эталона ГЭТ1-2022, в которой располагались КЧ-М. Контроль колебаний температуры мобильной лаборатории во время калибровки производился с помощью бортового термогигрометра ИВА-6А-КП-Д с чувствительностью  $0.1^\circ\text{C}$  и погрешностью измерений  $\pm 0.3^\circ\text{C}$ . При разности температур лаборатории  $7.194^\circ\text{C}$  и интервале наблюдения 2.51 суток ТКЧ в относительном выражении составил:  $K_T = (2.18 \pm 0.005) \cdot 10^{-16} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

**На втором этапе** КЧ-М перебазировались из аппаратного зала, расположенного на первом этаже объекта “Сигнал”, в помещение корпуса 28 на седьмом этаже, а схема измерений соответствовала рис. 1.

**На третьем этапе** выполнялось измерение разности ШВ КЧ-М и КЧ-С дуплексным методом в начальный момент ( $\Delta\tau_{\text{С}} = 0$ ). Начальное измерение выполнено 28 ноября, при этом интервал времени наблюдения начального момента составил 3 ч. Измерения проведены в период с 13:01 до 16:01 UTC, частота съема измерительной информации составляла 1 измерение в 6 минут, общее количество измерений — 31. Результат измерений, определяемый формулой (12) и приведенный на середину интервала 3 часа, составил:  $\Delta\tau_{\text{СМ}}^{\text{изм0}} = -202\,893\,173.297 \pm 0.123 \text{ нс.}$

**На четвертом этапе** выполнялось измерение разности ШВ квантовых часов, соответствующей концу интервала накопления ( $\Delta\tau_{\text{С}} = \tau_{\text{Н}}$ ). Конечное измерение выполнено 5 декабря также на интервале времени наблюдения 3 ч в период с 3:37 до 6:37 UTC с частотой съема измерительной информации 1 измерение в 6 минут, общее количество измерений также составило 31. Интервал времени накопления  $\tau_{\text{Н}}$  составил 110.6 ч, или более 4 суток. Результат измерений, приведенный на середину интервала измерений 3 часа, определяется формулой (14). Он составил:  $\Delta\tau_{\text{СМ}}^{\text{измН}} = -202\,893\,346.643 \pm 0.085 \text{ нс.}$

Общий график изменения разности шкал времени, соответствующий всем этапам эксперимента, представлен на рис. 2.

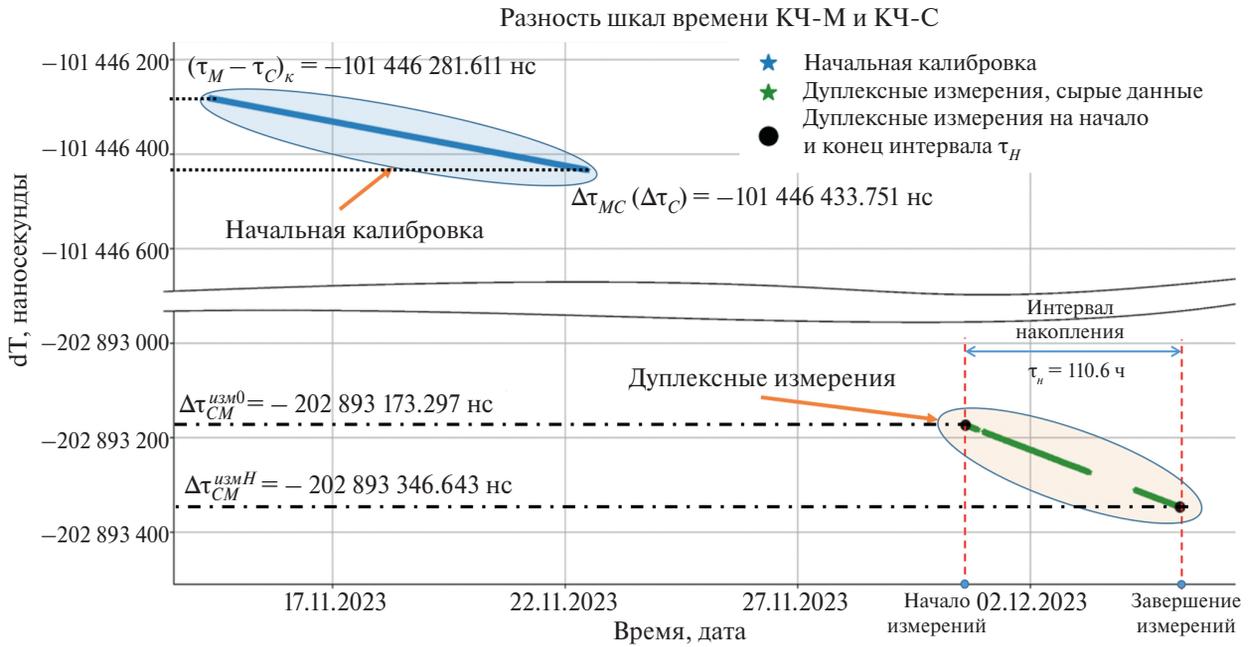


Рис. 2. Результаты измерений разности шкал времени КЧ-М и КЧ-С.

Как отмечалось, в течение всего интервала времени накопления  $\tau_H$  температура в месте размещения КЧ-М контролировалась термогигрометром. Результаты контроля температуры КЧ-М в точках калибровки и измерений в ходе эксперимента представлены на рис. 3.

На этапе начальной калибровки КЧ-М размещались в непосредственной близости от КЧ-С

в термостатированном помещении с высокоточной системой поддержания температуры. Среднее значение температуры на данном этапе составило  $T_{cp}^K = 20.05^\circ\text{C}$ , при среднеквадратическом отклонении  $\sigma_T^K = 0.02^\circ\text{C}$ . При размещении КЧ-М на этапе дуплексных измерений в помещении на 7 этаже корпуса 28 среднее значение температуры составило  $T_{cp}^D = 20.66^\circ\text{C}$ , при среднеквадратическом отклонении  $\sigma_T^D = 0.24^\circ\text{C}$ . Таким образом, изменение

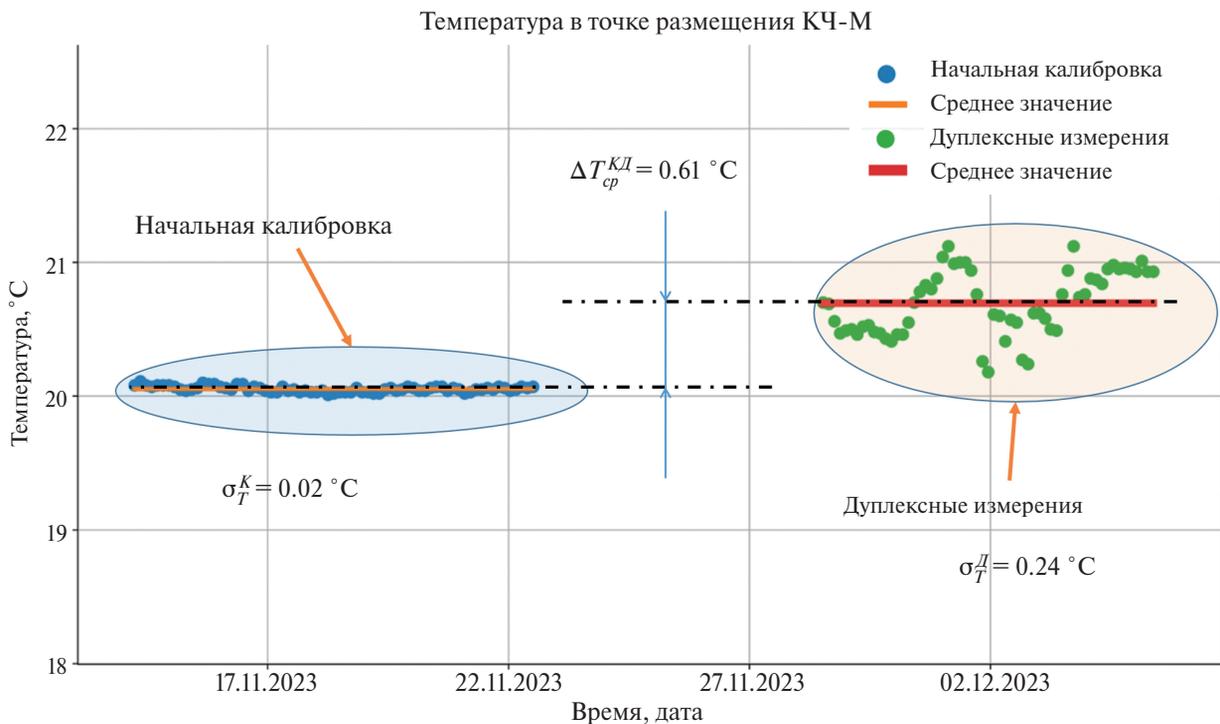


Рис. 3. Температура КЧ-М в точках калибровки и измерений.

среднего значения температуры при перемещении КЧ-М с объекта “Сигнал” в корпус 28 составило  $\Delta T_{\text{ср}}^{\text{КД}} = 0.61^\circ\text{C}$ .

**На пятом этапе** вычислялись разность гравитационных потенциалов и ортометрических высот. Вычисления проводились по формуле (16), при этом сумма входящих в эту формулу величин  $\delta\tau_{\text{выч}} = \left(\Delta\tau_{0\text{M}}^{\text{H}} + C\tau_{\text{H}}^2 + \Delta\tau_{\text{T}}^{\text{H}}\right)_{\text{выч}}$  вычислялась по формулам (2) и (7) на основе результатов калибровки и по текущим измерениям температуры.

В результате определены следующие значения составляющих величины  $\delta\tau_{\text{выч}}$ , входящих в формулу (16):

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{0\text{M}}^{\text{H}} &= -85.873 \pm 0.084 \text{ нс}, \\ C\tau_{\text{H}}^2 &= 0.076 \pm 0.042 \text{ нс}, \\ \Delta\tau_{\text{T}}^{\text{H}} &= 0.053 \pm 0.021 \text{ нс}.\end{aligned}$$

По результатам измерения рассогласования ШВ КЧ-М и КЧ-С  $\Delta\tau_{\text{СМ}}^{\text{изм}0}$  на этапе 3, рассогласования ШВ квантовых часов на этапе 4  $\Delta\tau_{\text{СМ}}^{\text{измН}}$  спустя интервал времени накопления гравитационного эффекта  $\tau_{\text{H}} = 110.6$  час, а также на основе вычисления суммы составляющих  $\delta\tau_{\text{выч}} = \left(\Delta\tau_{0\text{M}}^{\text{H}} + C\tau_{\text{H}}^2 + \Delta\tau_{\text{T}}^{\text{H}}\right)_{\text{выч}}$ , входящих в формулу (16), находим искомые значения ортометрической высоты и разности потенциалов:

$$\begin{aligned}\Delta H_{\text{орт}}^{\text{СМ}} &\approx \frac{c^2}{g\tau_{\text{H}}} \left[ \begin{aligned} &\frac{1}{2}(-202\,893\,346.643 - \\ &(-202\,893\,173.297)) \cdot 10^{-9} - \\ &(-85.873 + 0.076 + 0.053) \cdot 10^{-9} \end{aligned} \right] = \\ &= 21.34 \text{ м}; \\ \Delta\varphi_{\text{СМ}} &= 209.475 \text{ м}^2/\text{с}^2.\end{aligned}\quad (18)$$

При этом получены следующие оценки случайных погрешностей:

- погрешность определения начального расхождения исследуемых шкал времени КЧ-М и КЧ-С:  $\sigma_{(\tau_{\text{M}} - \tau_{\text{C}})_{\text{K}}} = 0.025$  нс;
- погрешность оценки ухода ШВ КЧ-М за счет начальной расстройки частоты бортового генератора КЧ-М:  $\sigma_{\Delta\tau_{0\text{M}}^{\text{H}}} = 0.084$  нс;
- погрешность оценки ухода ШВ КЧ-М за счет квадратичного ухода частоты, вызванного линейным дрейфом:  $\sigma_{C\tau_{\text{H}}^2} = 0.042$  нс;
- погрешность оценки разности шкал дуплексным методом на этапе 3:  $\sigma_{\Delta\tau_{\text{СМ}}^{\text{изм}0}} = 0.123$  нс;
- погрешность оценки разности шкал дуплексным методом на этапе 4:  $\sigma_{\Delta\tau_{\text{СМ}}^{\text{измН}}} = 0.085$  нс;
- погрешность оценки учета температурного влияния на частоту КЧ-М:  $\sigma_{\Delta\tau_{\text{T}}^{\text{H}}} = 0.021$  нс;

Среднеквадратическая погрешность определения ортометрической высоты квантовых часов КЧ-М определялась по формуле (17). В результате получено:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{H}} &\approx \frac{c^2}{g\tau_{\text{H}}} \left[ \begin{aligned} &\frac{1}{4} \left( (0.085 \cdot 10^{-9})^2 + (0.123 \cdot 10^{-9})^2 \right) + \\ &+ \left( (0.084 \cdot 10^{-9})^2 + (0.042 \cdot 10^{-9})^2 + \right. \\ &\quad \left. + (0.021 \cdot 10^{-9})^2 \right) \end{aligned} \right]^{0.5} = \\ &= 2.80 \text{ м}, \\ \sigma_{\Delta\varphi} &\approx 27.507 \text{ м}^2/\text{с}^2.\end{aligned}\quad (19)$$

Таким образом, расчетное значение разности ортометрических высот между точками размещения КЧ-М в эксперименте составляет:  $\Delta H_{\text{орт}} = 21.34 \pm 2.80$  м.

Полученное значение в пределах погрешности согласуется со значением разности высот точек размещения КЧ-М в ходе эксперимента, определенной геодезическим методом нивелирования:  $\Delta H_{\text{геод}} = 20.8$  м.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлены результаты оригинального эксперимента по измерению разности ортометрических высот разнесенных квантовых часов с помощью дуплексного метода через геостационарный спутник связи. Полученное на основе предложенного метода значение разности высот  $\Delta H_{\text{орт}} = 21.34 \pm 2.80$  м соответствует действительной геодезической разности высот с погрешностью 2.80 м. Данный результат, полученный на измерительной базе длиной около 850 м, получен в России впервые.

Рассмотренный в статье метод измерения разности ортометрических высот с использованием высокостабильных квантовых часов и дуплексного спутникового канала связи имеет существенный потенциал при реализации единой высотной основы на глобальном уровне. Это объясняется очень большой зоной покрытия геостационарного спутника связи. Достигнутая по результатам эксперимента погрешность определения разности ортометрических высот составляет единицы метров и может быть улучшена за счет повышения стабильности используемых стандартов частоты, а также совершенствования дуплексного метода сравнений шкал времени, например, за счет расширения эффективного спектра используемых сигналов [10].

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта № 23-67-10007.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Ф. Фатеев, Релятивистская метрология околоземного пространства-времени (Менделеево, ФГУП “ВНИИФТРИ”, 2017).
2. В.Ф. Фатеев, Е.А. Рыбаков, Ф.Р. Смирнов, В.П. Сысов, С.С. Донченко, А.А. Карауш,

- О.В. Колмогоров, В.П. Лопатин*, Квантовые нивелиры и сеть “Квантовый футшток”. Теория, эксперименты, макетирование (Менделеево, ФГУП “ВНИИФТРИ”, 2024).
3. *В.Ф. Фатеев, Е.А. Рыбаков, Ф.Р. Смирнов*, ПЖТФ 43 (10), 91 (2017).
  4. *В.Ф. Фатеев, Е.А. Рыбаков*, ДАН. Физика, технические науки 496 (1), 41 (2020).
  5. *В.Ф. Фатеев, И.Ю. Игнатенко*, Альманах современной метрологии 1 (29), 106 (2022).
  6. *Peng Cheng, Wenbin Shen, Xiao Sun, Chenghui Cai, Kuangchao Wu and Ziyu Shen*, Remote Sens. 14, 451 (2022).
  7. *А.В. Наумов*, Альманах современной метрологии 3 (8), 162 (2016).
  8. Государственный первичный эталон единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ 1-2022: <https://www.vniiftri.ru/standards/izmereniya-vremeni-i-chastoty/get-1-2022-gosudarstvennyu-pervichnyu-etalon-edinits-vremeni-chastoty-i-natsionalnoy-shkaly-vremeni/>
  9. *J.A. Barnes*, in 15th Annual PTTI Meeting, Proc. 551 (1983).
  10. *Р.С. Кобяков, С.Ю. Медведев, К.Г. Мишагин, А.В. Наумов, И.Ю. Блинов*, Альманах современной метрологии 2 (22), 73 (2020).

## THE DIFFERENCE IN GRAVITATIONAL POTENTIALS AT TWO GROUND POINTS MEASURING EXPERIMENT USING THE DUPLEX SATELLITE METHOD

© 2025 A. Naumov, F. Smirnov\*, V. Fateev

*Russian Metrological Institute of Technical Physics and Radio Engineering Measurements,  
Mendeleevo, Moscow region, Russia*

\*e-mail: frsmirnof@vniiftri.ru

For the first time in the Russian Federation, an experiment on measuring the difference in gravitational potentials and orthometric heights of two ground points using a quantum clock and a duplex satellite communication method was conducted. The measurement points were located on the territory of the Federal State Unitary Enterprise “VNIIFTRI” at a distance of 850 m from each other with a height difference of about 21 m. The Russian geostationary satellite Express-80 was used as a repeater, duplex communication was established using stationary and relocatable sets of duplex equipment. The difference in orthometric heights was measured with an error of about 2.8 m.

*Keywords:* quantum clock, gravitational potential, duplex method, orthometric heights